**Quel est le plus grand nombre ~~possible~~ utile ?**

[](https://sciencetonnante.files.wordpress.com/2014/04/3676227162_1b14e6f699_z.jpg)

Les grands nombres nous fascinent, et ce depuis le plus jeune âge. Qui, enfant, n’a pas joué au jeu de celui qui dira le nombre le plus grand ? Grâce à l’imagination des mathématiciens, il est assez facile d’écrire des nombres absolument gigantesques, mais cela sert-il vraiment à quelque chose ? Y a-t-il des situations où l’on ait besoin de nombres vraiment gigantesques ?

Nous allons voir que dans la Nature, pas tant que ça. Mais dans les démonstrations mathématiques, oui ! Partons donc à la chasse au plus grand nombre utile à ce jour.

**Les grands nombres dans la nature**

En mathématiques, grâce à la merveilleuse notation « puissance », il est assez facile de construire des nombres énormes. Un million c’est « 10 puissance 6 », soit 10^6, un milliard c’ est 10^9, mais on peut aller facilement beaucoup plus loin, par exemple considérer le nombre :

10^{100}

On appelle ce nombre **un gogol** (et d’où vient le nom du célèbre moteur de recherche.) C’est un nombre représenté par le chiffre 1 suivit de 100 fois le chiffre 0. **Mais quel intérêt en pratique ?** Regardons autour de nous ce que l’on trouve comme grands nombres.

La population de la planète, c’est 7 milliards, donc pas très loin de 10^{10}. La fortune de Bill Gates ? 70 milliards de $, donc proche de 10^{11}. Le nombre de cellules dans un corps humain ? Environ 10^{13}. La capacité d’un disque dur exprimée en bits ? Environ 10^{13}également. Le PIB total de la planète sur une année ? 10^{17}dollars !

Pour atteindre le gogol, il va falloir chercher des choses plus grosses ! Heureusement la physique de l’infiniment petit et de l’infiniment grand vont nous aider. Il y a **environ 10^{23}molécules d’eau dans un verre d’eau, à peu près autant que de grains de sable sur Terre, et que d’étoiles dans l’Univers visible**. D’ailleurs l’Univers visible a une taille d’environ 10^{27}mètres. Si on regarde son volume plutôt que son diamètre, on fait un saut à 10^{80}mètres-cubes. C’est à peu près aussi **le nombre d’atomes dans l’Univers visible**, puisque la densité moyenne est de l’ordre d’un atome par mètre-cube. On est pas loin du gogol !

Pour pousser le bouchon, on peut exprimer le volume de l’Univers rapporté au volume d’un proton, par exemple. Un proton mesure environ 10^{-42}mètres cubes, donc le volume de l’Univers observable exprimé en volume de proton est égal à 10^{122}. Bingo !

On peut même aller plus loin en le rapportant au volume de l’électron (10^{-45} \mathrm{m}^3) voire carrément au volume de Planck, lequel vaut dans les 10^{-105} \mathrm{m}^3. Ca nous met **le volume de l’Univers en nombre de volumes de Planck à 10^{185}.** Si vous multipliez par l’âge de l’Univers exprimé en temps de Planck, on arrive à 10^{245}pour le volume total d’espace-temps de l’Univers observable exprimé en unités de Planck (un nombre sans dimension, vous noterez). Voilà, je ne suis pas sûr qu’on puisse faire mieux.

Alors, **10^{245} est-il le plus grand des nombres utiles ?** En physique, probablement; en maths, certainement pas !

**Et à la fin, les maths gagnent**

En cherchant dans la nature, nous sommes péniblement arrivés à ce nombre de 10^{245}, soit quand même plus qu’un gogol au carré !

Mais évidemment, en regardant cela, le matheux rigole. En effet, on peut facilement exploser ce nombre, par exemple avec ce qui s’appelle le **gogolplex**, qui est tout simplement « 10 puissance gogol », c’est à dire :

10^{10^{100}}

Voilà un nombre qu’on ne peut même pas qualifier « d’astronomique », puisqu’il est justement bien supérieur à tout ce qu’on trouve en astronomie ou en cosmologie !

On pourrait penser que ce nombre est absolument ridicule, dans la mesure où il ne sert à absolument rien. Mais ça n’est pas vrai ! Pour un matheux, **un nombre peut être considéré comme utile dès qu’il intervient dans une démonstration mathématique intéressante**. Et nous allons voir que cela ouvre la porte à pas mal de nouveaux nombres de fort beau gabarit.

### Les flèches de Knuth

Pour aller encore plus loin encore plus vite, le mathématicien/informaticien Donald Knuth a eu l’idée d’une nouvelle notation. Si vous regardez ce qu’on a fait pour avoir des nombres de plus en plus grands, on est passés de l’addition à la multiplication, puis de la multiplication à la puissance, puis de la puissance à la tour. A chaque fois la mécanique est la même :

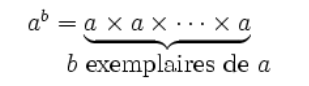
Une multiplication, c’est un enchaînement d’additions;

Une puissance, c’est un enchaînement de multiplications;

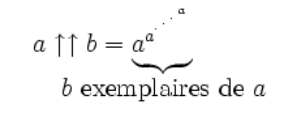
Une tour, c’est un enchaînement de puissances.

Knuth a alors proposé de généraliser l’idée. Nous allons utiliser **la notation « flèche vers le haut »** \uparrowpour désigner l’opération puissance. Pour la tour de puissance, on va écrire une double flèche vers le haut \uparrow \uparrow .

Avant, nous avions l'écriture ab, que l'on comprenait comme ça :



Et bien, Knuth propose un système de doubles flèches verticales :



On a, par exemple, 3flfl3  
ou   9flfl5, nombre considérablement plus grand que le gogolplex.

**Et après ?**

Et bien, Knuth a encore agrandi son concept de flèches, en proposant la triple flèche, la quadruple flèche et la n-flèche définie de manière récursive. Ca donne alors quelque chose comme ça :

aflflflb

On a, par exemple, 2flflfl3

**Exercice** : Calculer les puissances de Knuth suivantes.

2 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image014.gif 2 =

2 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image014.gif 3 =

2 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image014.gif 4 =

3 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image014.gif 2 =

3 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image014.gif 3 =

3 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image014.gif 4 =

2 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image018.gif 2 =

2 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image018.gif 3 =

2 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image014.gif http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image010.gif4 =

3 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image018.gif 2 =

3 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image018.gif 3 =

3 http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/aaaGdNb/Knuth_fichiers/image018.gif 4 =